

1. Gleichungen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad \text{Bi-Quadratische Gleichung}$$

Ungleichungen:

- Auf beiden Seiten darf ein beliebiger Term *addiert* oder *subtrahiert* werden.
- Eine Ungleichung darf mit einer *positiven Zahl* multipliziert oder dividiert werden.
- Bei Multiplikation oder Division mit einer *negativen Zahl* muss das *Ungleichheitszeichen umgedreht* werden.

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} \quad (k \leq n) \quad \text{Binominalkoeffizient}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ für } (k > n) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

2. Vektoralgebra

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad \text{Betrag eines Vektors}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad \text{Richtungswinkel eines Vektors}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$$

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix} \quad |\vec{e}_a| = 1 \quad \text{Einheitsvektor}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \quad \text{Skalarprodukt}$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad \text{Schnittwinkel zweier Vektoren}$$

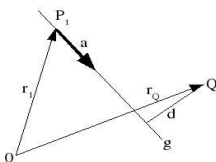
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad \text{Orthogonalität zweier Vektoren}$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- (1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
- (2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ ($\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$)
- (3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: Rechtssystem $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$
 $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$
 $A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$

Komponentendarstellung/Determinantendarstellung:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}$$

Abstand zweier windschiefer Geraden:

$$d = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} \right)$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene:

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

3. Lineare Gleichungssysteme (LGS) / Matrizen

Lösbarkeit LGS:

- 1) Das LGS ist lösbar (eindeutig oder mehrdeutig) nur dann, wenn gilt $\text{Rg } A = \text{Rg } A_{\text{erw}}$
- 2) Ist das LGS lösbar, so gilt: Anzahl der frei wählbaren Parameter = Anzahl d. Variablen – Rang der Koeffizientenmatrix. Man wählt die Unbekannte x_i frei, die zu Spalten der Koeffizientenmatrix in Staffelform gehören, in denen keine „Karo“-Elemente auftreten. („Karo“-Element = erstes von Null verschiedenes Element einer von links durchsuchten Zeile der Koeffizientenmatrix in Staffelform)

Begriffe:

- 1) A heißt *symmetrisch* wenn $A = A^T$ ($a_{ij} = a_{ji}$)
- 2) A heißt *schief-symmetrisch* wenn $A = -A^T$ ($a_{ij} = -a_{ji}$) => Hauptdiagonale: $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$
- 3) A heißt *obere (untere) Dreiecksmatrix*, wenn gilt: $a_{ij} = 0$ für $i > j$ ($a_{ij} = 0$ für $i < j$)
- 4) A heißt *Diagonalmatrix*, wenn $a_{Ti,jT} = 0$ für $i \neq j$
- 5) A heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn A^{-1} existiert. $A \cdot A^{-1} = E$; $\det A \neq 0$

Determinanten:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad \text{Regel von Sarrus mit } n = 2$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{Regel von Sarrus mit } n = 3$$

$$\det A = |A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{ik} |U_{ik}| \quad n \geq 3$$

4. Funktionen

Allgemeine Funktionseigenschaften:

- $f(-x) = f(x)$ **grade** Funktion (achsensymmetrisch)
- $f(-x) = -f(x)$ **ungrade** Funktion (punktsymmetrisch)
- $f(x_1) \leq f(x_2)$ **monoton wachsend**
- $f(x_1) \geq f(x_2)$ **monoton fallend**
- $f(x \pm p) = f(x)$ **Periodizität**

4.1 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Rechenregeln für Grenzwerte:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$
- 6) $\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{f(x)}) = a^{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)$

Grenzwertregel von Bernoulli und l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{für } \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

Stetigkeit einer Funktion (an d. Stelle x_0)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.2 lineare Funktionen (Geraden):

$$y = mx + b \quad m = \tan \alpha \quad (\alpha : \text{Steigungswinkel}) \quad \text{Hauptform}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \quad \text{Punkt-Steigungsform}$$

4.3 Parabel:

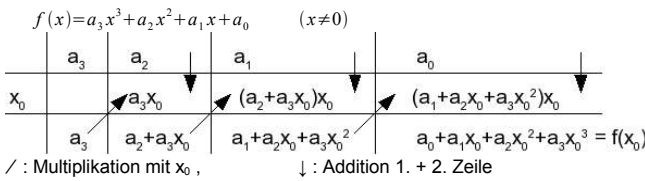
$$y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0) \quad \text{Hauptform}$$

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) \quad \text{Scheitelpunkt}$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Produktform } (x_1, x_2 \text{ Nst.})$$

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2 \quad \text{Scheitelform } (x_0, y_0 \text{ Scheitel})$$

4.4 Horner Schema



4.5 Gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$n > m$: **Echt gebrochenrationale** Funktion (sonst unecht)

- Nullstelle x_0 : $h(x_0) = 0$
 Definitionslücke x_0 : $h(x_0) = 0$
 Pol- oder Unendlichkeitsstelle: $h(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$

Berechnung der Nullstellen und Pole:

- Zähler- und Nennerpolynom in Linearfaktoren zerlegen und kürzen.
- Linearfaktoren d. Zählers => Nullstellen
 Linearfaktoren d. Nenners => Pole

Asymptotisches Verhalten im Unendlichen:

Echt gebrochenrational: $y = 0$
 Unecht gebrochenrational: $y = p(x)$

$$y = \frac{3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 24x - 24}{x^3 + x^2 - x - 1} = (3x - 15) + \left(\frac{9x^2 + 30x - 39}{x^3 + x^2 - x - 1} \right) = p(x) + r(x)$$

4.6 Die Exponentialfunktion (e-Funktion)

$$y = e^x \quad -\infty < x < \infty$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 2,718281\dots$$

Allgemeine Exponentialfunktion
 $y = a^x$ (Basis $a > 0, a \neq 1$)

Eigenschaften:

- Definitions Bereich: $-\infty < x < \infty$
- Werte Bereich: $0 < y < \infty$ (keine NST. !)
 streng monoton wachsend
- $a > 1$
- $0 < a < 1$
 streng monoton fallend
- $y(0) = 1$
 (y-Achse wird immer bei 1 geschnitten)
- $y = a^x$
 entsteht durch Spiegelung an der y-Achse

4.7 Logarithmus Funktion

$$x = \log_a r \quad r : \text{Numerus } (r > 0)$$

$$a : \text{Basis } (a > 0, a \neq 1)$$

$y = \log_a x$ mit $x > 0$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

Eigenschaften:

- Def. Bereich: $x > 0$
- Wertebereich: $-\infty < y < \infty$
- Nullstellen: $x_1 = 1$
- $0 < a < 1$: Strengmonoton fallend
 $a > 1$: Streng monoton wachsend
- Asymptote: $x = 0$

Rechenregeln für Logarithmen:

- $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a(u^k) = k \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n} \right) \cdot \log_a u$
 ($a > 0, u > 0, v > 0; k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)

Spezielle Logarithmen:

$$\log_{10} r = \lg r; \log_2 r = \lg_2 r; \log_e r = \ln r \quad e = \text{Eulersche Z.}$$

Umrechnung von der Basis a in die Basis b:

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a r = K \cdot \log_a r$$

4.8 Trigonometrische Funktionen

Umrechnung der Winkelmaße:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha \quad \text{Vom Grad- ins Bogenmaß}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x \quad \text{Vom Bogen- ins Gradmaß}$$

Definition der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b} \quad \cot \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

Wichtige Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen:

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \quad \sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Additionstheoreme

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$$

$$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \tan x_2}$$

$$\cot(x_1 \pm x_2) = \frac{\cot x_1 \cot x_2 \mp 1}{\cot x_2 \pm \cot x_1} \quad /* \text{ S. 96 Papula } */$$

5. Partialbruchzerlegung (Beispiel):

$$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}$$

Nullstellen des Nenners:

$$x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \quad x_3 = 5$$

Zuordnung der Partialbrüche:

$$x_{1/2} = 1 \quad (\text{zweifache Nst.}) \quad \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

$$x_3 = 5 \quad (\text{einfache Nst.}) \quad \frac{B}{x-5}$$

Ansatz für Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{-x^2 + 2x - 17}{(x-1)^2(x-5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-5}$$

Berechnung der Konstanten A₁, A₂ und B:

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{A_1(x-1)(x-5) + A_2(x-5) + B(x-1)^2}{(x-1)^2(x-5)} \Rightarrow$$

$$-x^2 + 2x - 17 = A_1(x-1)(x-5) + A_2(x-5) + B(x-1)^2$$

Wir setzen für x der Reihe nach die Werte 1, 5 und 0 ein:

$$x=1 \Rightarrow -16 = -4A_2 \Rightarrow A_2 = 4$$

$$x=5 \Rightarrow -32 = 16B \Rightarrow B = -2$$

$$x=0 \Rightarrow -17 = 5A_1 - 5A_2 + B \Rightarrow A_1 = 1$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-x^2 + 2x - 17}{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-5}$$

6. Differentialrechnung

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{Differenzierbarkeit}$$

1. Ableitung der Elementaren Funktionen

x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
Arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$
Arccot x	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\coth x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
arsinh x	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
arcosh x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
artanh x	$\frac{1}{1-x^2}$
arcoth x	$\frac{1}{1-x^2}$

Ableitungsregeln:

Faktorregel:
 $y = C \cdot f(x) \Rightarrow y' = C \cdot f'(x)$

Summenregel:
 $y = f_1(x) + f_2(x) + \dots \Rightarrow y' = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots$

Produktregel:
 $y = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel:
 $y = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

Kettenregel:
 $f'(x) = F'(u) \cdot u'(x) \quad \text{Substitution } u = \dots x \dots$

7. Integration

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad \text{Bestimmtes Integral}$$

Faktorregel:

$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Summenregel:

$$\int_a^b [f_1(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

Vertauschungsregel:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Sonstige Regeln mit (a ≤ c ≤ b):

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Integration durch Substitution:

$$u = g(x) \quad , \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad , \quad dx = \frac{du}{g'(x)} \quad \text{bzw.}$$

$$x = h(u) \quad , \quad \frac{dx}{du} = h'(u) \quad , \quad dx = h'(u) du$$

(u = g(x) bzw. x = h(u) müssen monotone Funktionen sein)

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du$$

$$\int \varphi(u) du = \Phi(u)$$

$$\int f(x) dx = \int \varphi(u) du = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x)$$

Partielle Integration:

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Integration durch Partialbruchzerlegung des Integranden:

- 1.) f(x) unecht gebrochenrational => Polynomdivision => ganzrationale Funktion p(x) + echt gebrochenrationale Funktion r(x) => f(x) = p(x) + r(x)
- 2.) r(x) in Partialbrüche zerlegen
- 3.) Integration von p(x) und aller Partialbrüche

Grund- und Stammintegrale:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$
$\int \sinh x dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\operatorname{coth} x + C$

Uneigentliche Integrale:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) dx \quad \text{eine der Integrationsgrenzen im Unendlichen}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow b} \int_a^\lambda f(x) dx \quad \text{Polstelle bei } x = b$$

Volumen eines Rotationskörpers:

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx \quad \text{Rotation um x-Achse}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_a^b x^2 dy \quad \text{Rotation um y-Achse}$$

8. Komplexe Zahlen

Darstellungsformen:

$z = x + j \cdot y$ Normal-Form / Kartesische-Form
 $z = r \cdot (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$ Trigonometrische Form
 $z = e^{j \cdot \varphi}$ Exponentialform

Umrechnungen:

Polarform -> Normalform
 $x = r \cdot \cos \varphi$ $y = r \cdot \sin \varphi$

Normalform -> Trigonometrische Form
 $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
 $\tan \varphi = \frac{y}{x}$

Trigonometrische Form -> Exponentialform
 $z = r(\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$

Grundbegriffe

$z_1 = z_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2$ Gleichheit
 $z^* = x - j \cdot y$ Konjugiert
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Betrag

Addition / Subtraktion

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2)$ Addition
 $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2)$ Division

Beide **NUR** in **NORMALFORM** möglich!!

Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$
 $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
 $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Regel: zwei komplexe Zahlen werden multipliziert (dividiert), indem man die Beträge multipliziert (dividiert) und die Winkel addiert (subtrahiert).

Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + j \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ ($z_2 \neq 0$)
 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot (\sin(\varphi_1 - \varphi_2))]$

Inversion

$A^{-1} = \frac{1}{A} = \frac{1}{a_r + j \cdot a_i} = \frac{a_r - j \cdot a_i}{a_r^2 + a_i^2} = \frac{1}{A} \cdot e^{-j \cdot \alpha}$

Potenzieren

$z^n = r^n \cdot e^{j \cdot \varphi \cdot n}$

9. Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = s$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s$

Eine *konvergente* unendliche Reihe besitzt einen eindeutigen Summenwert *s*. Einer *divergenten* unendlichen Reihe lässt sich kein Summenwert zuordnen. Ist $s = \pm \infty$, so nennt man die unendliche Reihe *bestimmt divergent*.

9.1 Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium:

Erfüllen die Glieder der unendlichen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Bedingung

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$

so ist die unendliche Reihe *konvergent*. Ist aber $q > 1$, so ist die Reihe *divergent*. Für $q = 1$ ist *keine Entscheidung* über Konvergenz bzw. Divergenz möglich. Es müssen andere Methoden zur Bestimmung genutzt werden.

Wurzelkriterium:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1$ (Konvergenz)

Für $q = 1$ versagt das Kriterium. Für $q > 1$ *divergiert* die Reihe.

Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:

Eine alternierende Reihe vom Typ

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$

mit $a_n > 0$ ist *konvergent*, wenn die Reihenglieder die folgenden Bedingungen erfüllen:

- 1) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Geometrische Reihe:

$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \frac{a}{1-q}$ ($|q| < 1$)

Wichtige konvergente Reihen:

- 1) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$ (Eulerische Zahl)
- 2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$ (alternierende harmonische Reihe)
- 3) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$
- 4) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$
- 5) $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}$
- 6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 1$

9.2 Potenzreihen

Entwicklung um die Stelle x_0 :

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$

Entwicklung um den Nullpunkt ($x_0 = 0$):

$P(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

9.3 Konvergenzradius und Konvergenzbereich der Potenzreihe:

$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ oder $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (Konvergenzradius)

Die Reihe *konvergiert* für $|x| < r$ und *divergiert* für $|x| > r$. Über die beiden **Randpunkte** $|x|$ kann *keine Aussage* getroffen werden. Diese müssen extra bestimmt werden.