<u>Rechnen mit reellen Zahlen:</u>

Rechenregeln für Potenzen:

(1) $a^m * a^n = a^{m+n}$

(2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m*n}$

(4) $a^n * b^n = (a*b)^n$

(5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad (b \neq 0)$

Rechenregeln für Wurzeln

(1) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

(2) $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$

(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m*n}} = \sqrt[m*n]{a}$

(4) $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right) * \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = (a*b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a*b}$

(5) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (b > 0)$

Logarithmen

$x = \log_a r \qquad r: Numerus\,(r > 0) \quad a: Basis\,(a > 0, a \neq 1)$

Rechenregeln für Logarithmen:

(1) $\log_a(u*v) = \log_a u + \log_a v$

(2) $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

(3) $\log_a(u^k) = k * \log_a u$

(4) $\log_a \sqrt[n]{u} = \left(\frac{1}{n}\right) * \log_a u$

$(a > 0, u > 0, v > 0 ; k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

Spezielle Logarithmen:

$\log_{10} r = lg\, r ; \log_2 = lb\, r ; \log_e r = \ln r$ e = Eulersche Z.

Umrechnung von der Basis a in die Basis b:

$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \frac{1}{\log^a b} * \log_a r = K * \log_a r$

Binomischer Lehrsatz:

n-Fakultät

$n! = 1*2*3 \cdots (n-1)n = \prod_{k=1}^{n} k \qquad (n \in \mathbb{N})$

$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} * b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} * b^2 + \binom{n}{n-1} a^1 * b^{n-1} + b^n$

Bildungsgesetz der Binomialkoeffizienten:

$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k \leq n)$

Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\qquad \binom{n}{k} = 0$ für (k > n)

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $\qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Die ersten Binomschen Formeln

$(a+b)^2 = a_2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a_3 + 3a_2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Quadratische-Gleichungen mit einer Unbekannten

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad ax^2 + bx + c = 0$

Vektoren

Betrag und Richtungswinkel eines Vektors

$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a\,sup2_z} = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$

Richtungswinkel eines Vektors

$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$

$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

$a_x = |\vec{a}|\cos\alpha \qquad a_y = |\vec{a}|\cos\beta \qquad a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$

Normierung eines Vektors (Einheitsvektor)

$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_x/|\vec{a}| \\ a_x/|\vec{a}| \end{pmatrix} \qquad |\vec{e}_a| = 1$

Skalarprodukt

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos\varphi$

$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x * b_x + a_y * b_y + a_z * b_z$

komponentend.

Schnittwinkel zweier Vektoren:

$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Orthogonalität zweier Vektoren:

$\vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

(1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin\varphi$

(2) $\vec{c} \perp \vec{a}\, und\, \vec{c} \perp \vec{b} \qquad (\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{b} = 0)$

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} : Rechtssystem \qquad \vec{c} = \vec{a}\, x\, \vec{b}$

$0° \leq \varphi \leq 180°$

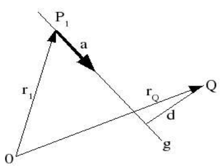
$A_{Parallelogramm} = |\vec{a}\, x\, \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$

Komponentendarstellung/Determinantendarstellung:

$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z \end{vmatrix}$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$d = \frac{|\vec{a}\, x(\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}$



Abstand zweier paralleler Geraden

$d = \frac{|\vec{a}_1\, x(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}$

Abstand zweier windschiefer Geraden:

$$d=\frac{|\vec{a}_1\vec{a}_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1 x \vec{a}_2|}$$

Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden:

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}\right)$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

$$d=\frac{|\vec{n}(\vec{r}_Q-\vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene:

$$d=\frac{|\vec{n}(\vec{r}_1-\vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}$$

Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Determinanten

Lösbarkeit LGS:

1) Das LGS ist lösbar (eindeutig oder mehrdeutig) nur dann, wenn gilt Rg A = Rg A_{erw}
2) Ist das LGS lösbar, so gilt: Anzahl der frei wählbaren Parameter = Anzahl d. Variablen – Rang der Koeffizientenmatrix. Man wählt die Unbekannte x_i frei, die zu Spalten der Koeffizientenmatrix in Staffelform gehören, in denen keine „Karo“-Elemente auftreten. („Karo“-Element = erstes von Null verschiedenes Element einer von links durchsuchten Zeile der Koeffizientenmatrix in Staffelform)

Begriffe:

1) A heißt *symmetrisch* wenn $A = A^T$ ($a_{j,i} = a_{i,j}$)
2) A heißt *schiefsymetrisch* wenn $A = -A^T$ ($a_{j,i} = -a_{i,j}$) => Hauptdiagonale: $a_{i,i} = -a_{i,i}$ => $a_{i,i} = 0$
3) A heißt *obere (untere) Dreiecksmatrix*, wenn gilt: $a_{i,j}=0$ für i > j ($a_{i,j} = 0$ für i < j)
4) A heißt *Diagonalmatrix*, wenn aTi,jT = 0 für i ≠ j
5) A heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn A^{-1} existiert. $A * A^{-1} = E$; det A ≠0

Determinanten:

Definition:

Es sei A ein (n,n)-Matrix (n≥3)

1) Die (n-1, n-1)-Untermatrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht, heiße U_{ij}
2) Man definiert |A| rekursiv:

$$det\,A=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \quad n = 2$$

$$det\,A=|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}\right. \quad \text{Sarrus } n = 3$$

$$det\,A=|A|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|U_{ik}| \quad n \geq 3$$

Allgemeine Funktionseigeneschaften:

f(-x) = f(x)	grade Funktion (achsensymmetrisch)
f(-x) = -f(x)	ungrade Funktion (punktsymmetrisch)
$f(x_1) \leq f(x_2)$	monoton wachsend
$f(x_1) \geq f(x_2)$	monoton fallend
f(x±p) = f(x)	Periodizität

Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion:

Rechenregeln für Grenzwerte:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} C*f(x)=C*\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right) \quad (C\in\mathbb{R})$
2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)*g(x)]=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)*\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$
4) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
5) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$
6) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$
7) $\lim\limits_{x\to x_0}(a^{f(x)})=a^{(\lim_{x\to x_0} f(x))}$
8) $\lim\limits_{x\to x_0}(\log_a f(x))=\log_a\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)$

Grenzwertregel von Bernoulli und l'Hospital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{für} \quad \frac{0}{0}\,oder\,\frac{\infty}{\infty}$$

Stetigkeit einer Funktion (an d. Stelle x_0)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

lineare Funktionen:

Hauptform einer Geraden

y = mx + b m = tan α (α : Steigungswinkel)

Punkt-Steigungsform einer Geraden

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

Hauptform und Scheitelform einer Parbel:

y = ax² + bx +c (a ≠ 0)

$$S=\left(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \qquad \text{Scheitelpunkt}$$

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad \text{Produktform } (x_1,x_2 \text{ Nst.})$$

$$y-y_0=a(x-x_0)^2 \qquad \text{Scheitelform } (x_0,y_0 \text{ Scheitel})$$

Hornerschema für eine Polynomfunktion 3. Grades

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad (x\neq 0)$$

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		a_3x_0	$(a_2+a_3x_0)x_0$	$(a_1+a_2x_0+a_3x_0^2)x_0$
	a_3	$a_2+a_3x_0$	$a_1+a_2x_0+a_3x_0^2$	$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3 = f(x_0)$

⁄ : Multiplikation mit x_0 , ↓ : Addition 1. + 2. Zeile

Gebrochenrationale Funktionen:

g(x): Zählerpolynom vom Grade m

h(x): Nennerpolynom vom Grade n

n > m : Echt gebrochenrationale Funktion (sonst unecht)

Asymptotisches Verhalten im Unendlichen:

– Eine echt gebrochenrationale Funktion nähert sich im Unendlichen stets der x-Achse
– Eine unecht gebrochenrationale Funktion wird duch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion p(x) und eine echt gebrochenrationale Funktion r(x) zerlegt: f(x) = p(x) + r(x) Im Unendlichen nähert sich f(x) asymptotisch p(x)

Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß x: Maßzahl der Länge des Kreisbogens, der im Einheitskreis dem Winkel α gegenüberliegt. Einer vollen Umdrehung entspricht im Bogenmaß 2π

Umrechnung der Winkelmaße:

$$x=\frac{\pi}{180°}\alpha$$ Vom Grad- ins Bogenmaß

$$\alpha=\frac{180°}{\pi}x$$ Vom Bogen- ins Gradmaß

Definition der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin\alpha=\frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}=\frac{a}{c} \qquad \cos\alpha=\frac{Ankathete}{Hypotenuse}=\frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha=\frac{Gegenkathete}{Ankathete}=\frac{a}{b} \qquad \cot\alpha=\frac{Ankathete}{Gegenkathete}=\frac{b}{a}$$

wichtige Beziehungen zw. trig. Funktionen

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \qquad \sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{1}{\cot x} \qquad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$$

Additionstheoreme

$$\sin(x_1\pm x_2)=\sin x_1\cos x_2\pm\cos x_1\sin x_2$$

$$\cos(x_1\pm x_2)=\cos x_1\cos x_2\mp\sin x_1\sin x_2$$

$$\tan(x_1\pm x_2)=\frac{\tan x_1\pm\tan x_2}{1\mp\tan x_1\tan x_2}$$

$$\cot(x_1\pm x_2)=\frac{\cot x_1\cot x_2\mp 1}{\cot x_2\pm\cot x_1}$$ /* S. 96 */

Exponentialfunktionen:

e-Funktion:

$$y=e^x \qquad -\infty<x<\infty$$

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718281\ldots$$

Allgemeine Exponentialfunktion

$y = a^x$ (Basis a > 0, a ≠ 1)

Eigenschaften:

(1) Def. Bereich: -∞ < x<∞

(2) Werte Bereich: 0<y<∞ (keine NSt. !)

(3) a > 1 streng monoton wachsend

(4) 0<a< 1 streng monoton fallend

(5) y(0) = 1 (y-Achse wird immer bei 1 geschnitten)

(6) y= a^{-x} entsteht durch Spiegelung an der y-Achse

Logarithmusfunktionen:

y = $\log_a x$ mit x>0 ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion y = a^x (a>0, a ≠ 1)

Eigenschaften:

(1) Def. Bereich: x > 0

(2) Wertebereich: -∞ < y < ∞

(3) Nullstellen x_1= 1

(4) 0<a<1: Strengmonoton fallend
    a> 1: Streng monoton wachsend

(5) Asymptote: x = 0

Differentialrechnung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ Differenzenquotient

Differentialquotient oder 1. Ableitung:

$$\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

1. Ableitung der Elementaren Funktionen

x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

sinx	cosx
cos x	- sin x
tan x	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
cot x	$\frac{1}{\cos^2 x}=-1-\cot^2 x$
Arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arctan x	$\frac{1}{1+x^2}$
Arccot x	$-\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a)a^x$
ln x	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a)a^x}$

Ableitungsregeln:

Produktregel:

y = u(x)*v(x) => y' = u'(x)*v(x) + u(x)*v'(x)

Quotientenregel:

$$y=\frac{u(x)}{v(x)} \quad => \quad y'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Kettenregel:

f'(x) = F'(u) * u'(x)

Potenzreihen:

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$ allg. Darstellungform

Umwandlung durch Substitution z=x-x_0 (x_0=0) nach

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$ Entwicklung um d. Nullpunkt

Konvergent Folge hat Grenzwert

Divergent Folge hat keinen Grenzwert

Besondere Folgen:

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ eulerische Zahl

Nullfolgen:

$g = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \qquad g = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 0$

Grund und Stammintegrale

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \{\begin{matrix}\arcsin x + C_1\\ -\operatorname{arccot} x + C_2\end{matrix}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \{\begin{matrix}\arctan x + C_1\\ -\operatorname{arccot} x + C_2\end{matrix}$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$	$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\coth x + C$

Partialbruchzerlegung

$r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ Nenner besitzt nur reelle Nst.

$\frac{A}{x-x_1}$ einfache Nst.

$\frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$ zweifache Nst.

$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$ r-fache Nst.

Beispiel:

$r(x) = \frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5}$ echt gebrochenrational

Nst. des Nenners

$x^3-7x^2+11x-5=0$ => $x_{1/2} = 1$, $x_3 = 5$

Zuordnung der Partialbrüche

$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$ zweifache Nst.

$\frac{B}{x-5}$ einfache Nst.

Ansatz für Partitalbruchzerlegung

$$\frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5} = \frac{-x^2+2x-17}{(x-1)^2+(x-5)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-5}$$

Berechnung der Konstanten A_1, A_2 und B

$$\frac{-x^2+2x-17}{(x-1)^2+(x-5)} = \frac{A_1(x-1)(x-5)+A_2(x-5)+B(x-5)^2}{(x-1)^2(x-5)} \quad =>$$

$$-x^2+2x-17 = A_1(x-1)(x-5)+A_2(x-5)+B(x-1)^2$$

Wir setzen für x der Reihe nach d. Werte 1, 5 und 0 ein.

x=1	=> -16 = $-4A_2$	=> A_2	= 4
x=5	=> -32 = 16B	=> B	= -2
x=0	=> -17 = $5A_1 - 5A_2$ + B	=> A_1	= 1

Partitialbruchzerlegung:

$$\frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{2}{x-5}$$